$$\Rightarrow \hat f(s) = \frac{m(m-1)\lambda^2}{\sqrt{a}}\underbrace{\left(\frac{1}{s-v_1}-\frac{1}{s-v_2}\right)}_{\frac{v_1-v_2}{(s-v_1)(s-v_2)}}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \hat h(s) = \frac{m(m-1)\lambda^2(v_1-v_2)}{\sqrt{a}\,(s-v_1)(s-v_2)-(v_1-v_2)\cdot m(m-1)\lambda^2} = \frac{m(m-1)\lambda^2}{(2m-1)\lambda+\mu}\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+(2m-1)\lambda+\mu}\right)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{m(m-1)\lambda^2}{(2m-1)\lambda+\mu}\left(1-e^{-\overbrace{((2m-1)\lambda+\mu)}^{\text{Dämpfungsfaktor}}t}\right)$$

37

Aufgabe 4.8

4.9

$$\overset{H(0)=0}{\underset{H'=h}{\Longrightarrow}} H(t) = \frac{m(m-1)\lambda^2}{((2m-1)\lambda+\mu)^2}\cdot\left[((2m-1)\lambda+\mu)t + e^{-((2m-1)\lambda+\mu)t}-1\right] \quad t\geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{t}{H(t)} = \frac{((2m-1)\lambda+\mu)^2}{m(m-1)\lambda^2}\cdot\lim_{t\to\infty}\underbrace{\frac{t}{\underbrace{((2m-1)\lambda+\mu)}_{v}t-1}}_{=\frac{1}{v}} = \frac{\overbrace{(2m-1)\lambda+\mu}^{v}}{m(m-1)\lambda^2}\ \left(\text{Einheit } [\mu]=\frac{1}{t}\right) = \text{MTFF}$$

↳ $e^{-t\dots}$ fällt weg, da $e^{-t\to\infty}\to 0$

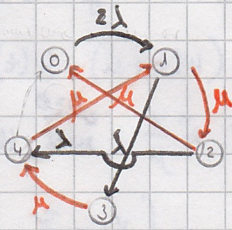
mit Reparaturrate μ und (Einzel-)Ausfallrate λ

05.06.2014 16 Die Erlangsche Phasenmethode

Zur Erinnerung: Die Summe von $k\in\mathbb{N}$ identisch zum Parameter $\lambda>0$ verteilten Zufallsvariablen ist Erlang-verteilt mit Ordnung k. -> Summe von Zeitphasen

Bsp.: 1 von 2-System mit der Ordnung $k:=2$ Erlang-verteilter Reparaturzeit zum Parameter $\mu>0$ (ein Mechaniker)

Zustände	Beschreibung	
0	beide Komponenten intakt	
1	eine Komponente ausgefallen	; Reparaturphase 1
2	-"-	; Reparaturphase 2
3	beide Komponenten ausgefallen	; " 1
4	-"-	; " 2



(Modellierung mittels extra Zustände entsprechend der Phasen

konstante Einzelausfallrate $\lambda>0$

$$\text{Intensitätsmatrix } B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overbrace{-\lambda} & \overbrace{\lambda} & \text{-> kalte Reserve} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda-\mu & \mu & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & -\lambda-\mu & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \mu \\ 0 & \mu & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} \end{array}$$

Bestimmung der/einer Grenzverteilung mittels $\vec p\cdot B=\vec 0$ im Fall der „kalten Reserve" (mit λ):

Zahlenbeispiel: $\lambda:=1$; $\mu:=2$ =>

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{umformen}]{\text{Spalten}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4/3 & 2/3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4/3 & 18/15 & -6/5 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4/3 & 6/5 & 0 \end{matrix}$$

$\vec p\cdot B=\vec 0$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -p_0 + 2p_2 &= 0 && \text{1. Spalte} && p_0 = \tfrac{8}{5}p_4 \\ -3p_1 + 2p_2 + 2p_4 &= 0 && \text{2. Spalte} && p_1 = \tfrac{6}{5}p_4 \\ -5p_2 + 4p_4 &= 0 && && p_2 = \tfrac{4}{5}p_4 \\ 2p_3 - \tfrac{6}{5}p_4 &= 0 && \rightarrow && p_3 = \tfrac{3}{5}p_4 \end{aligned}$$

$\rightarrow p_0+p_1+p_2+p_3+p_4 = 1$

$p_4\left(\frac{8}{5}+\frac{6}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+1\right)=1 \rightarrow p_4 = \frac{5}{26}$

$p_3 = \frac{3}{26}$; $p_2 = \frac{4}{26}$; $p_1 = \frac{6}{26}$; $p_0 = \frac{8}{26}$

Allgemeine Formel: $p_0 = \left(1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\right)^{-1} = {}^2$